

Lösung: 9/2

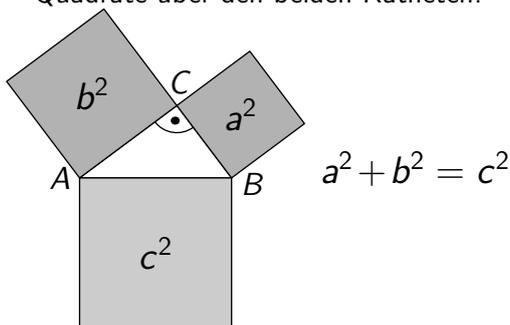
- a) $\sqrt{108} = \sqrt{4 \cdot 27} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
- b) $\sqrt{b^2} = |b|$
 $\sqrt{b^2}$ ist diejenige *nichtnegative* Zahl, die mit sich selbst multipliziert b^2 ergibt, also $|b|$.
- c) $\sqrt{4bc^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c^2} = 2\sqrt{b} \cdot |c| = 2c\sqrt{b}$

Lösung: 9/4

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} &= \frac{2\sqrt{2} \cdot (1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2})} = \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 2(\sqrt{2})^2}{1^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 4}{1 - 2} = \frac{2\sqrt{2} - 4}{-1} = \\ &= -2\sqrt{2} + 4 \end{aligned}$$

Lösung: 9/6

Der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse ist genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden Katheten.

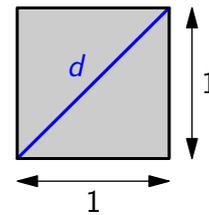


Lösung: 9/8

- a) $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1,5$
 $D = [1,5; +\infty[$
- b) $4 - \frac{2}{3}x > 0 \Leftrightarrow 4 > \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 4 > x \Leftrightarrow 6 > x$
 $D =]-\infty; 6[$
- c) $4x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow |x| \geq \frac{3}{2}$
 $D =]-\infty; -1,5] \cup [1,5; +\infty[$

Lösung: 9/1

Die Länge der Diagonalen d im Einheitsquadrat ist keine rationale Zahl.



Man kann zeigen, dass $d^2 = 2$ gilt (z.B. Satz des Pythagoras) und $d = \sqrt{2}$ sich nicht als Bruch darstellen lässt, somit also keine rationale Zahl ist. Dies zeigt die Notwendigkeit der Einführung der reellen Zahlen \mathbb{R} , um auch solche mathematischen Fragestellungen beantworten zu können.

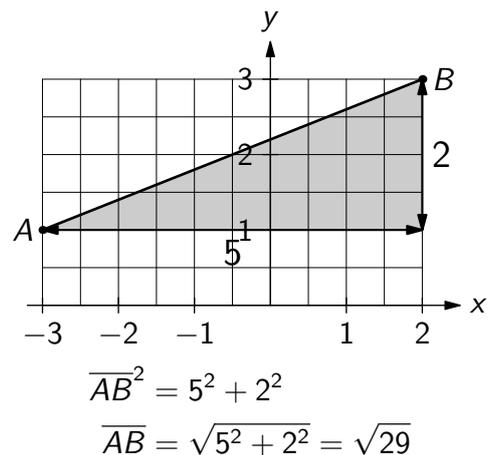
Lösung: 9/3

- a) $2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ kann nicht zusammengefasst werden
- c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$
- d) $\sqrt{12} : \sqrt{3} = \sqrt{12 : 3} = \sqrt{4} = 2$
- e) $\sqrt{x^2 + 9}$ kann nicht vereinfacht werden
- f) $\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2} = |x - \frac{1}{2}|$
(zu $|x - \frac{1}{2}|$ vgl. Lösung 9/2b)

Lösung: 9/5

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{x^2 - 2,25} &= 5 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 2,25} &= 4 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2,25} &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2,25 &= 2^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 6,25 = \frac{25}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{5}{2} \\ L &= \{\pm \frac{5}{2}\} \text{ (nach Probe!)} \end{aligned}$$

Lösung: 9/7



Lösung: 9/10

$$p(x) = -3 \cdot (x + 2)^2 - 0,5$$

G_p ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(-2 | -0,5)$, die gegenüber der Normalparabel mit dem Faktor 3 gestreckt ist. Die Parabel ist achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = -2$.

Lösung: 9/9

a) $S(4,5|0)$

b) $S(-6|1)$

c) $S(0|-9)$

Lösung: 9/12

• Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned} y &= -2(x^2 - 7x + 3,5^2 - 3,5^2) - 19,5 = \\ &= -2(x^2 - 7x + 3,5^2) + 2 \cdot 3,5^2 - 19,5 = \\ &= -2(x^2 - 7x + 3,5^2) + 2 \cdot 3,5^2 - 19,5 = \\ &= -2(x - 3,5)^2 + 5 \implies S(3,5|5) \end{aligned}$$

• Ausnützung der Symmetrie

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-19,5)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-14 \pm \sqrt{40}}{-4} = \\ &= \frac{14}{4} \mp \frac{\sqrt{40}}{4} = 3,5 \mp \frac{\sqrt{40}}{4} \implies x_s = 3,5 \\ (\text{oder: } x_s &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 3,5) \\ y_s &= -2 \cdot 3,5^2 + 14 \cdot 3,5 - 19,5 = 5 \implies S(3,5|5) \end{aligned}$$

Lösung: 9/11

a) A: Öffnungsfaktor $\frac{1}{3} \implies$ weiteste Parabel

b) F: Öffnungsfaktor 3 \implies engste Parabel

c) E: Scheitel (1|1), Öffnungsfaktor 2

d) B: nach oben geöffnet, Öffnungsfaktor 2

e) D: $y = -x(x-2) \implies$ Nullstellen $x = 0$ und $x = 2$

f) C: $y = -x(x-1) \implies$ Nullstellen $x = 0$ und $x = 1$

Lösung: 9/14

Mit $a = 6$, $b = -13$ und $c = 6$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \\ &= \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{13+5}{12} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{13-5}{12} = \frac{2}{3}$$

Lösung: 9/13

G_g ist eine Parabel, welche die x -Achse im Punkt $P(2|0)$ berührt. Daher muss P der Scheitel sein. Also:

$$y = a \cdot (x - 2)^2 + 0$$

$A(1|2)$ liegt genau dann auf G_g , wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen:

$$2 = a \cdot (1 - 2)^2 + 0 \implies a = 2$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$y = 2 \cdot (x - 2)^2 = 2 \cdot (x^2 - 4x + 4) = 2x^2 - 8x + 8$$

$$\text{Also: } a = 2, b = -8, c = 8$$

Lösung: 9/16

$$x^4 - x^2 - 6 = 0$$

Substitution: $u = x^2$

$$u^2 - u - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow u_{1/2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 3 \quad \text{oder} \quad u_2 = -2$$

$$x^2 = u \quad (\text{Resubstitution})$$

$$x^2 = 3 \quad \text{oder} \quad x^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \quad (x^2 = -2 \text{ hat keine Lösung})$$

$$L = \{\pm\sqrt{3}\}$$

Lösung: 9/15

a)

$$4x^3 = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot (4x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \frac{3}{4}$$

Beachte: Würde man beide Seiten der Gleichung in einem der ersten Schritte durch x^2 teilen, so würde man die Lösung $x = 0$ verlieren!

b) $-3n^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow -3n^2 = -27 \Leftrightarrow n^2 = 9 \Leftrightarrow n = \pm 3$

Lösung: 9/18

Die Punkte A und C liefern die Nullstellen $x = 2$ und $x = -7$. Dies führt zum Ansatz

$$p(x) = a \cdot (x - 2) \cdot (x + 7).$$

$B(3|5)$ liegt genau dann auf G_p , wenn gilt:

$$5 = a \cdot (3 - 2) \cdot (3 + 7) \\ \Leftrightarrow 5 = 10a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Also:

$$p(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \cdot (x + 7) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 7$$

Lösung: 9/20

Sei x die Länge und y die Breite des Rechtecks in Zentimetern, so gilt:

Umfang: (I) $2 \cdot (x + y) = 40 \Leftrightarrow y = 20 - x$ (I')

Flächeninhalt: (II) $x \cdot y = 91$

(I') in (II) liefert:

$$x \cdot \underbrace{(20 - x)}_y = 91 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 20x - 91 = 0 \\ \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-91)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-20 \pm 6}{-2} \\ x_1 = 13, \text{ damit: } y_1 = 20 - x_1 = 7 \\ x_2 = 7, \text{ damit: } y_2 = 20 - x_2 = 13$$

Das Rechteck hat also die Länge 13cm und die Breite 7cm oder umgekehrt.

Lösung: 9/22

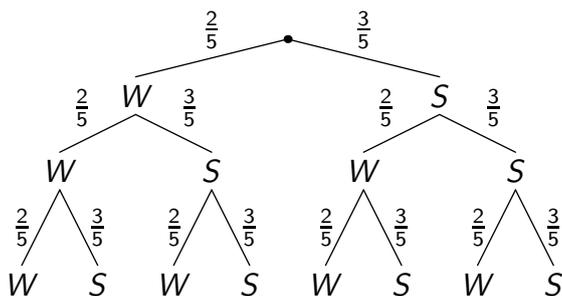
Gleichsetzen der Funktionsterme liefert die x -Koordinaten der Schnittpunkte:

$$g_k(x) = f(x) \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - k = -x^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - k = 0 \\ \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8k}}{4}$$

Die Diskriminante $D = 4 + 8k$ entscheidet über die Anzahl der Lösungen und damit auch über die Anzahl der Schnittpunkte:

- $D < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{2}$: kein Schnittpunkt
- $D = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$: genau ein Schnittpunkt
- $D > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2}$: zwei Schnittpunkte

Lösung: 9/24



- a) $P(A) = P(WWS) + P(WSW) + P(SWW) = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = 28,8\%$
- b) $P(B) = P(WW) + P(SW) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = 40\%$

Lösung: 9/17

$$(I') = 2 \cdot (I) + (III) : \quad 0 - y + 3z = 21 \\ (II') = 4 \cdot (II) + 3 \cdot (III) : \quad 0 + 17y - 5z = 103 \\ 5 \cdot (I') + 3 \cdot (II') : \quad -5y + 51y = 414 \\ \Leftrightarrow y = 9$$

$$y = 9 \text{ in } (I') : \quad -9 + 3z = 21 \\ \Leftrightarrow z = 10$$

$$y = 9, z = 10 \text{ in } (I) : \quad 2x - 2 \cdot 9 + 10 = 8 \\ \Leftrightarrow x = 8$$

Lösung: 9/19

- a) $f_k: x \mapsto k \cdot (x - 2)^2 - 1; x \in \mathbb{R}$
mit dem Scharparameter $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- b) $P(7|49)$ liegt genau dann auf G_k , wenn gilt:

$$49 = k \cdot (7 - 2)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow 49 = 25k - 1 \quad (\text{Punkt vor Strich!}) \\ \Leftrightarrow 50 = 25k \\ \Leftrightarrow k = 2$$

Lösung: 9/21

Die gesuchte Zahl sei x . Damit liefert die Angabe den Ansatz

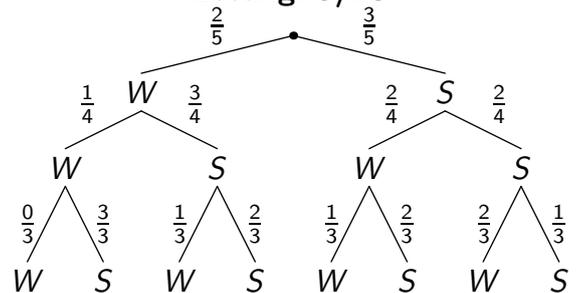
$$x = \frac{1}{x} - 0,45.$$

Diese Gleichung multipliziert man mit x (sinnvoll, da $x \neq 0$):

$$x^2 = 1 - 0,45x \\ \Leftrightarrow x^2 + 0,45x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-0,45 \pm \sqrt{0,45^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \\ \Leftrightarrow x_1 = 0,8; \quad (x_2 = -1,25)$$

Da x positiv sein soll, ist die gesuchte Zahl 0,8.

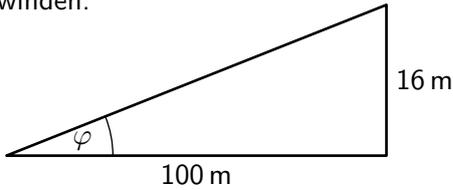
Lösung: 9/23



- $P(A) = \frac{2}{5} = 40\%$
- $P(B) = P(WWS) + P(WSW) + P(SWW) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = 30\%$
- $P(C) = P(WW) + P(SW) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = 40\%$

Lösung: 9/26

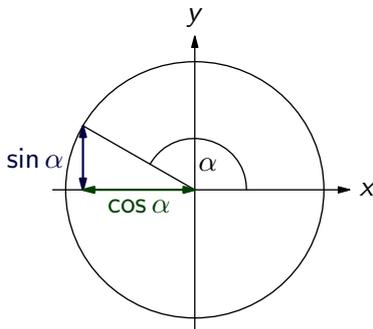
- a) Auf einer horizontalen Distanz von 100 m muss der Radprofi einen Höhenunterschied von 16 m überwinden:



b) $\tan \varphi = \frac{16 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 0,16$

Also schließt die Bergstraße mit der Horizontalen den Winkel $\varphi \approx 9,1^\circ$ ein.

Lösung: 9/28



Beachte, dass $\cos \alpha$ hier negativ ist!

Lösung: 9/30

Volumen: $V = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3} a^2 h = 48 \text{ m}^3$

Höhe h_s des Seitendreiecks mit dem Satz des Pythagoras:

$$h_s^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 \implies h_s \approx 9,2 \text{ m}$$

Fläche A_s eines Seitendreiecks:

$$A_s = \frac{1}{2} a \cdot h_s \approx 18,4 \text{ m}^2$$

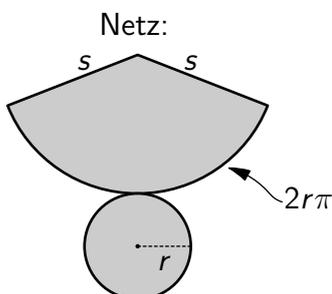
Oberfläche: $O = G + 4 \cdot A_s = a^2 + 4 \cdot A_s \approx 89,6 \text{ m}^2$

Neigungswinkel: $\tan \delta = \frac{h}{\frac{1}{2}a} = 4,5 \implies \delta \approx 77,47^\circ$

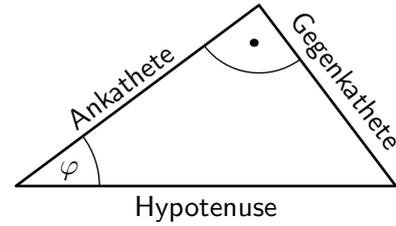
Lösung: 9/32

Volumen: $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$

Mantellinie: $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ (Satz des Pythagoras!)



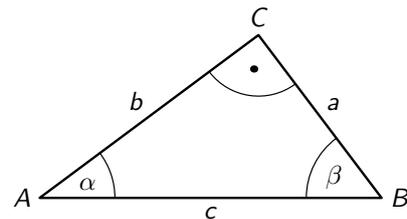
Lösung: 9/25



$$\sin \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}; \quad \cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}; \quad \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Lösung: 9/27

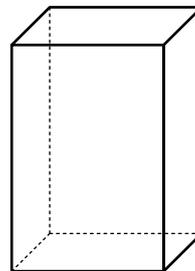


$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \iff a = c \cdot \sin \alpha = 2,15 \text{ cm}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \iff b = c \cdot \cos \alpha \approx 3,72 \text{ cm}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \iff \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 60^\circ$$

Lösung: 9/29



$$\begin{aligned} V &= G \cdot h = \\ &= a^2 \cdot h = \\ &= (2 \text{ cm})^2 \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri ändert sich das Volumen nicht, wenn man die Deckfläche verschiebt, ohne h zu verändern.

Lösung: 9/31

$$V = r^2 \pi h$$

$$\iff \frac{V}{\pi h} = r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{220 \text{ m}^3}{\pi \cdot 2,8 \text{ m}}} \approx 5,0 \text{ m}$$

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h =$$

$$= 2\pi \cdot (5,0 \text{ m})^2 + 2\pi \cdot 5,0 \text{ m} \cdot 2,8 \text{ m} \approx 245 \text{ m}^2$$