Lösung: 10/2

Beachte: $\pi \mathrel{\widehat{=}} 180^\circ$

a) $60^\circ \mathrel{\widehat{=}} \frac{60^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{1}{3}\pi$

b) $\dfrac{\pi}{4} \mathrel{\widehat{=}} \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

c) $50^\circ \mathrel{\widehat{=}} \frac{50^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{5}{18}\pi$

d) $\dfrac{2}{5}\pi \mathrel{\widehat{=}} \frac{2}{5} \cdot 180^\circ = 72^\circ$

e) $58^\circ \mathrel{\widehat{=}} \frac{58^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{29}{90}\pi$

f) $5 = \frac{5}{\pi} \cdot \pi \mathrel{\widehat{=}} \frac{5}{\pi} \cdot 180^\circ \approx 286{,}5^\circ$

Lösung: 10/1

Unter der Quadratur des Kreises versteht man eine Konstruktion nur unter Verwendung von Zirkel und Lineal. Es geht darum, zu einem vorgegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren. Dies ist jedoch nicht möglich, wenn man nur Zirkel und Lineal verwenden will. Diese Unmöglichkeit wurde mathematisch bewiesen.

Lösung: 10/4

a)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$O = 4\pi r^2$$

b)

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}$$

Lösung: 10/3

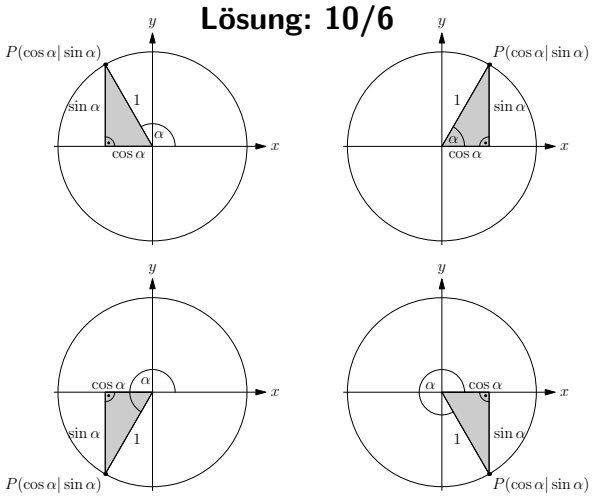
Die drei markierten Punkten bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a.
Zur Berechnung des Umfangs U betrachtet man die drei Kreisbögen:

$$U = 3 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2a\pi = a\pi$$

Den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks $\frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$ (vgl. Merkhilfe: Figurengeometrie) muss man zweimal von den drei Kreissektoren abziehen, weil jeder Sektor auch dieses Dreieck beinhaltet:

$$A = 3 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot a^2\pi - 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)a^2$$

Lösung: 10/6



Lösung: 10/5

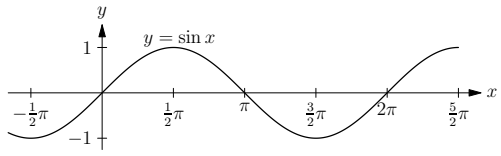
- $V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{34}{3}\pi$
- $m = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
- $O = \underbrace{3 \cdot \pi \cdot 5}_{\text{Kegelmantel}} + \underbrace{\left(3^2 \cdot \pi - 1^2 \cdot \pi\right)}_{\text{Kreisring}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1^2 \cdot \pi}_{\text{Halbkugel}} = 25\pi$

Lösung: 10/8

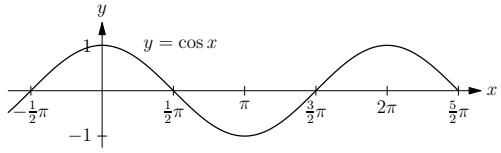
- a bewirkt eine Streckung ($|a| > 1$) bzw. Stauchung ($|a| < 1$) in $y-$Richtung. Die Amplitude ist dann $|a|$. Ist $a < 0$, erfolgt zusätzlich eine Spiegelung an der $x-$Achse.
- b bewirkt eine Veränderung der Periode auf $\frac{2\pi}{|b|}$.
- c bewirkt eine Verschiebung in $x-$Richtung um $\frac{|c|}{b}$ nach links ($c > 0$) bzw. nach rechts ($c < 0$).
- d bewirkt eine Verschiebung in $y-$Richtung nach oben ($d > 0$) bzw. nach unten ($d < 0$).

Lösung: 10/7

a)



b)



c) Die Kosinuskurve G_g geht aus der Sinuskurve G_f durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links hervor, daher gilt: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Lösung: 10/10

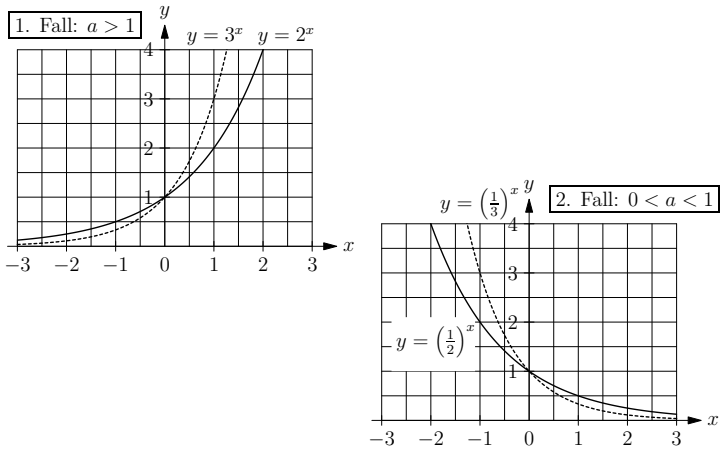
Koordinaten von $P(0|6)$ einsetzen:

$$f(0) = 6$$
$$b \cdot a^0 = 6$$
$$b = 6$$

Koordinaten von $Q(1|2)$ einsetzen:

$$f(1) = 2$$
$$b \cdot a^1 = 2$$
$$6 \cdot a = 2$$
$$a = \frac{1}{3}$$

Lösung: 10/9



Lösung: 10/12

$\log_b a$ ist der Logarithmus von a zur Basis b.

$\log_b a$ ist damit die Zahl, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.

Daher ist $\log_b a$ die Lösung der Gleichung

$$b^x = a.$$

Lösung: 10/11

a) $N(t) = 200 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$

b) $N(5) = 200 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \approx 63 \cdot 10^6$

Nach fünf Tagen sind noch 63 Millionen Zellen vorhanden.

Lösung: 10/14

Die Umformungen b) und d) sind richtig.

Vergleiche dazu die Logarithmusgesetze auf Karte 10/13.

Lösung: 10/13

Für $u, v, b \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b u^z = z \cdot \log_b u$$

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$

Lösung: 10/16

	R	$\overline{R}$	
N	0,35	0,45	0,80
$\overline{N}$	0,05	0,15	0,20
	0,40	0,60	1

a) $P(\overline{N} \cap \overline{R}) = 15\%$

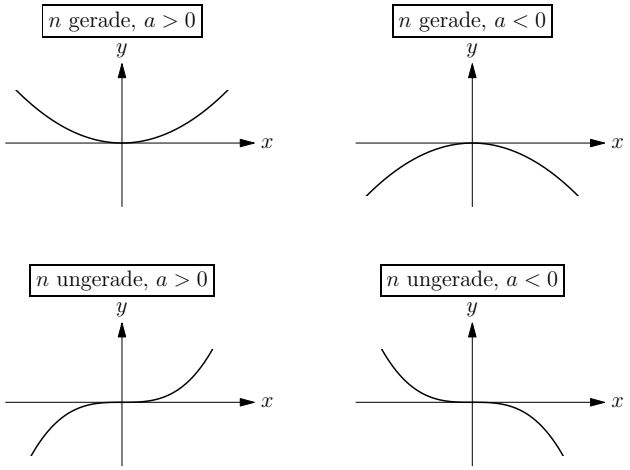
b) $P(\overline{N} \cup R) = 1 - P(N \cap \overline{R}) = 1 - 0{,}45 = 55\%$
oder:

$$P(\overline{N} \cup R) = P(\overline{N} \cap \overline{R}) + P(\overline{N} \cap R) + P(N \cap R) =$$
$$= 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}35 = 0{,}55 = 55\%$$

Lösung: 10/15

$$2{,}5 \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x$$
$$\frac{3^x}{2^x} = \frac{5}{2{,}5}$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$$
$$1{,}5^x = 2$$
$$x = \log_{1,5} 2 \approx 1{,}71$$

Lösung: 10/18



Lösung: 10/17

R:„rauchender Betriebsangehöriger
W:„weiblicher Betriebsangehöriger

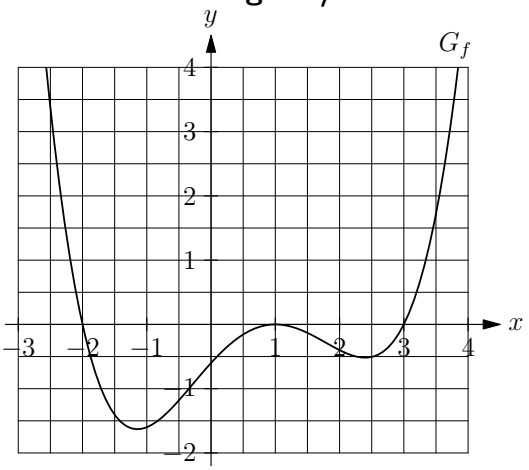
a) $P(W \cap R) = P(W) \cdot P_W(R) = 0{,}4 \cdot 0{,}15 = 0{,}06 = 6\%$

b) $\alpha)$ $P_R(W) = \dfrac{P(W \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}06}{0{,}1} = 60\%$

$\beta)$ $P_R(M) = 1 - P_R(W) = 1 - 60\% = 40\%$

$\gamma)$ $P_M(R) = \dfrac{P(M \cap R)}{P(M)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}6} \approx 6{,}7\%$

Lösung: 10/20



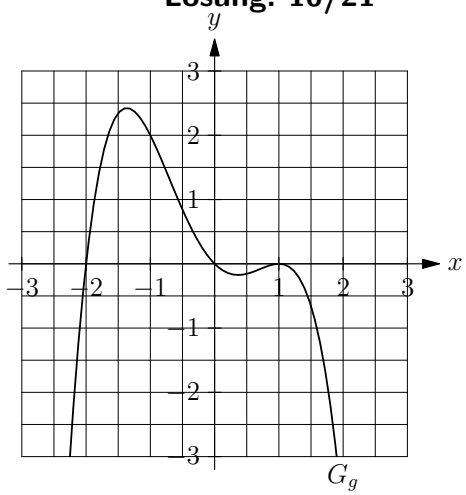
Lösung: 10/19

Bei Nullstellen ungerader Ordnung ergibt sich ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte,
bei Nullstellen gerader Ordnung ergibt sich kein Vorzeichenwechsel.

Lösung: 10/22

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + 2x^2 \qquad\quad - 3\big) : \big(x - 1\big) = x^2 + 3x + 3 \\
\underline{-x^3 \quad + x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 \\
\qquad \underline{-3x^2 + 3x} \\
\qquad\qquad\quad 3x - 3 \\
\qquad\qquad \underline{-3x + 3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Lösung: 10/21



Lösung: 10/24

a) $h\colon x \mapsto f(x+2) - 4; x \in \mathbb{R}$

$h\colon x \mapsto (x+2)^3 - 5(x+2) + 1 - 4; x \in \mathbb{R}$

b) $h\colon x \mapsto -2 \cdot f(x); x \in \mathbb{R}$

$h\colon x \mapsto -2 \cdot (x^3 - 5x + 1); x \in \mathbb{R}$

Lösung: 10/23

- a bewirkt eine Streckung ($|a| > 1$) bzw. Stauchung ($|a| < 1$) von G_f in $y-$Richtung. Ist $a < 0$, erfolgt zusätzlich eine Spiegelung an der $x-$Achse.
- c bewirkt dann eine Verschiebung in $x-$Richtung um $|c|$ nach links ($c > 0$) bzw. nach rechts ($c < 0$).
- Schließlich bewirkt d eine Verschiebung in $y-$Richtung nach oben ($d > 0$) bzw. nach unten ($d < 0$). Der so entstandene Graph ist das G_g.

Lösung: 10/26

a) $g(0) = 3 \cdot 0 - 2 = -2 \Rightarrow S_y\,(0|-2)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow N\left(\frac{2}{3}|0\right)$

b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow S_y\,(0|-1)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x_{1;2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-2 \pm 4}{6}$

$\Rightarrow N_1\left(\frac{1}{3}|0\right); \qquad N_2\,(-1|0)$

c) $h(0) = 6 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow S_y\,(0|0)$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (3x^2 + 2x - 1) = 0$ mit b) ergibt sich:

$\Rightarrow N_1\left(\frac{1}{3}|0\right); \qquad N_2\,(-1|0); \qquad N_3(0|0)$

Lösung: 10/28

a) $g(-x) = \dfrac{3(-x) - 7(-x)^3}{(-x)^2 + 2} = \dfrac{-3x + 7x^3}{x^2 + 2} = -\dfrac{3x - 7x^3}{x^2 + 2} = -g(x);$

G_g ist also punktsymmetrisch zum Ursprung

b) $f(-x) = 7(-x)^4 - \cos(5 \cdot (-x)) + 1 =$
$7x^4 - \cos(5x) + 1 = f(x);$

G_f ist also achsensymmetrisch zur $y-$Achse

Lösung: 10/25

- $g(x) = f(x+1) - 1{,}5$
- $h(x) = -f(x - 1{,}5) + 1$

Lösung: 10/27

a) $g(0) = \dfrac{3 \cdot 0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_y\left(0|-\frac{1}{2}\right)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow N\left(\frac{1}{3}|0\right)$

b) $f(0) = 3^0 - 4 = 1 - 4 = -3 \Rightarrow S_y\,(0|-3)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_3 4$

$\Rightarrow N\,(\log_3 4|0)$

c) $h(0) = -2 \cdot \cos(3 \cdot 0) = -2 \Rightarrow S_y\,(0|-2)$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow 3x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow N_k\left(\frac{(2k+1)\cdot\pi}{6}|0\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Lösung: 10/29

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x\left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(2x + \frac{5}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3 + \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}}{\underbrace{2x}_{\to\pm\infty} + \underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0}} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x\left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(2 - \frac{4}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3 + \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}}{2 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}} = \dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 4^x = +\infty; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} 4^x = 0$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x \cdot \sin(x)$ existiert nicht